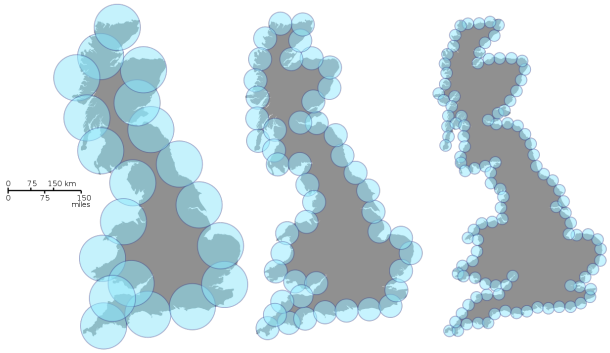
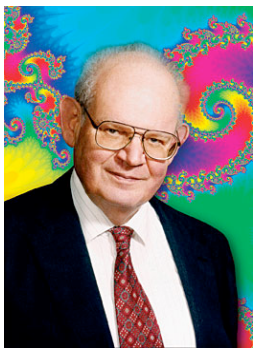
Modul 4 Fraktale Kurvenmonster

Wie lang ist die Küste Großbritanniens? Die Antwort auf diese Frage scheint klar zu sein. Allerdings findet man in jedem Nachschlagewerk einen (nicht nur geringfügig) anderen Wert. Der Grund dafür ist einfach: Beim Abmessen der Küste wurden Karten mit verschiedenem Maßstab verwendet. Je mehr Details eine Karte zeigt, desto länger wird die Küste.



Wählt man den Maßstab immer kleiner, so ist die Küste im Grenzfall auf Molekül- und Atomebene nahezu unendlich lang! Es ist ein Kuriosum, dass die Grenze zwischen zwei Ländern von diesen als verschieden lang angegeben wird.

Die Küstenlinie Großbritanniens oder die Nordseeküste sind Beispiele für das Auftreten so genannter *fraktaler* Kurven in der Natur.



Der Begriff *Fraktal* wurde 1975 von dem französischen Mathematiker Benoît Mandelbrot (1924-2010) geprägt. Das Wort leitet sich aus dem Lateinischen von dem Wort fractus - gebrochen ab. Vergrößerte Details von Fraktalen ähneln oder gleichen dem ganzen Objekt. Dies nennt man Skaleninvarianz und Selbstähnlichkeit. Mandelbrot gilt als der Vater der fraktalen Geometrie. Seine Forschung findet mittlerweile Anwendungen bis in die Finanzwelt und die Filmindustrie. Auch die menschliche Lunge, Blumenkohl oder Farne besitzen Eigenschaften von Fraktalen.

In diesem Modul geht es um Beispiele und Eigenschaften von fraktalen Kurven. Zunächst wird die Dimension von fraktalen Kurven diskutiert. Als Beispiel wird im nächsten Abschnitt dann die Kochkurve vorgestellt und mathematisch analysiert. Im dritten Abschnitt geht es dann um ein sehr allgemeines Verfahren zum Zeichnen und Berechnen von Fraktalen. Dies kannst Du mit Zettel und Stift nachvollziehen oder in einer Vertiefung in Maple selber programmieren.

Natürlich gibt es auch viele andere und allgemeinere Fraktale als die in diesem Modul vorgestellten fraktalen Kurven. Erwähnt werden soll hier das Apfelmännchen, das auch Mandelbrot-Menge heißt. Ohne auf die Erzeugung oder die Eigenschaften dieser Menge einzugehen, kannst Du Dich am Ende dieses Moduls auf die Suche nach fraktalen Spiralen und anderen interessanten Objekten in der Mandelbrot-Menge begeben.

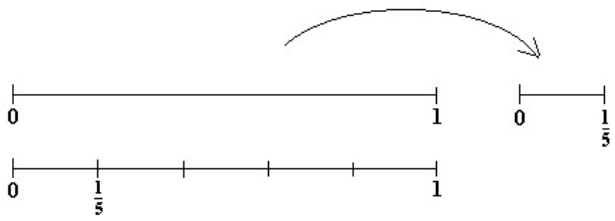
4.1 Dimension

Der Begriff der Dimension ist seit über 2000 Jahren bekannt. In der Geometrie des Euklid (360-280 v.Chr.) besitzt ein Punkt die Dimension 0, eine Gerade, Linie oder Strecke die Dimension 1, eine Fläche die Dimension 2 und ein Körper wie eine Kugel oder ein Würfel besitzt die Dimension 3.

Dimension	Objekt
0	Punkt
1	Gerade, Strecke u.ä.
2	Fläche: Kreis, Rechteck u.ä.
3	Körper: Kugel, Quader, Kegel, Pyramide u.ä.



Zur Beschreibung von Fraktalen genügt dieser Dimensionsbegriff allerdings nicht. Der deutsche Mathematiker Felix Hausdorff (1868-1942) suchte daher nach einer Definition für die Dimension, die auf Fraktale anwendbar ist, die bei den oben erwähnten geometrischen Objekten aber das gewohnte Ergebnis liefert. Seine Definition wird heute als Hausdorff-Dimension bezeichnet. Felix Hausdorff litt unter der rassistischen Verfolgung in der NS-Zeit und brachte sich vor der Deportation um.



Hausdorff dachte sich eine Strecke der Länge 1 unter einer Kopiermaschine, die alles um einen Faktor verkleinerte, der zum Beispiel auf $s=\frac{1}{5}$ eingestellt war. Als Kopie erhielt er wieder eine Strecke, allerdings mit der Länge $\frac{1}{5}$. Um die Länge 1 der Originalstrecke zu erhalten, muss man also $n=5$ dieser Kopien aneinanderreihen.

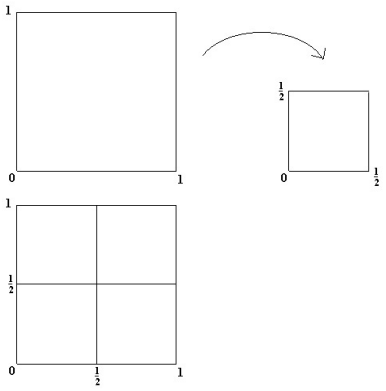
Hausdorff stellte daher die Formel

$$n=\left(\frac{1}{s}\right)^{D_{\mathrm{H}}} \qquad (1)$$

auf. Setzt man hier den Verkleinerungsfaktor $s=\frac{1}{5}$ ein, so erhält man

$$n=\left(\frac{1}{1/5}\right)^{D_{\mathrm{H}}}=5^{D_{\mathrm{H}}},$$

was für $D_{\mathrm{H}}=1$ gerade 5 ergibt. Dabei wird D_{H} als Hausdorff-Dimension bezeichnet. Die Hausdorff-Dimension einer Strecke ist also (wie gewohnt) gleich 1. Jeder andere Verkleinerungsfaktor wie zum Beispiel $s=\frac{1}{3}$ oder $s=\frac{1}{4}$ führt natürlich zu derselben Dimension.



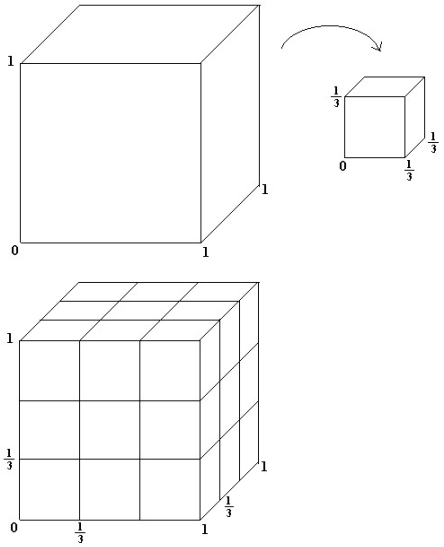
Nun betrachtet man ein Objekt der Dimension 2, zum Beispiel ein Quadrat. Der Verkleinerungsfaktor ist diesmal

zum Beispiel auf $s = \frac{1}{2}$ eingestellt. Als Kopie bekommt man wieder ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}$ und dem Flächeninhalt $\frac{1}{4}$. Um das Original zu überdecken, müssen $n = 4$ dieser Kopien aneinandergereiht werden.

Setzt man diese Werte in die Hausdorff-Formel (1) ein, so erhält man

$$4 = \left(\frac{1}{1/2}\right)^{D_H} = 2^{D_H},$$

woraus $D_H = 2$ folgt.



Die Formel funktioniert auch bei dreidimensionalen Objekten, zum Beispiel einem Würfel. Zeige mit Hilfe der nebenstehenden Abbildung dass man $D_H = 3$ erhält.

Allgemein bekommt man die Hausdorff-Dimension aus der Hausdorff-Formel durch Logarithmieren. Es gilt

$$n = \left(\frac{1}{s}\right)^{D_H}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln n = D_H \cdot \ln\frac{1}{s} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad D_H = -\frac{\ln n}{\ln s}.$$

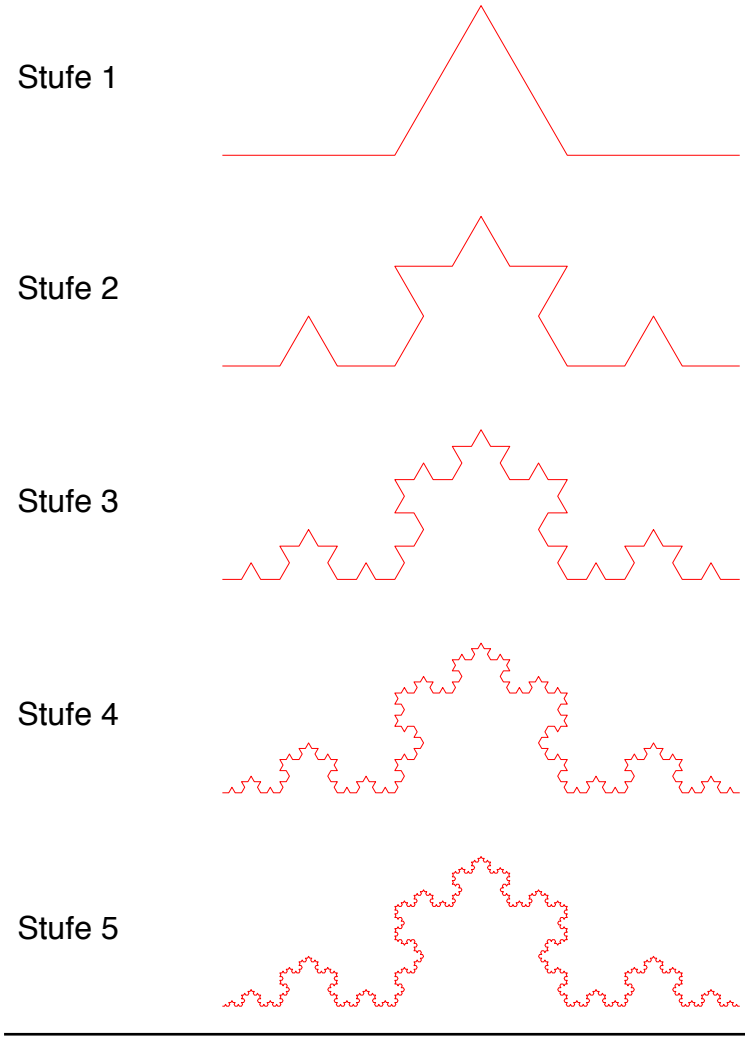
Die Hausdorff-Dimension (auch fraktale Dimension) bekommt man also aus der Anzahl der um den Verkleinerungsfaktor s verkleinerten Kopien n, die nötig sind, um das Original zu überdecken.

4.2 Kochkurve



Der schwedische Mathematiker Niels Fabian Helge von Koch schuf 1906 ein **mathematisches Monster**: eine Kurve, die ohne Sprünge verläuft - dies nennt man in der Mathematik stetig, - zu der es aber nirgends eine Tangente gibt. Die Ableitung der Kurve ist also an keiner Stelle sinnvoll. Koch lebte von 1870 bis 1924. Er war Professor für Mathematik an der Universität Stockholm und ist heute vor allem für seine Kochkurve bzw. Variationen dieser Kurve bekannt.

Die Bildung der Kochkurve kannst Du auf der Seite
http://www.jjam.de/Java/Applets/Fraktale/Koch_Kurve.html
in einer Animation nachvollziehen.



Ausgangsstufe ist eine Strecke der Länge 1. Diese wird in 3 gleich lange Teile zerteilt. Der mittlere Teil wird entfernt und durch eine Spitze aus 2 Strecken derselben Länge ersetzt. Die Stufe 1 besteht daher aus $n = 4$ Kopien der Ausgangsstufe, die jeweils um einen Faktor $s = \frac{1}{3}$ verkleinert sind. In der zweiten Stufe wird dieser Prozess wiederholt. Die 4 Seiten werden jeweils gedrittelt und das mittlere Stück wird durch eine Spitze ersetzt. Die Kochkurve ist das Ergebnis unendlich

vieler solcher Schritte, bei denen die Kurve immer feiner gezackt wird. Die Kochkurve besitzt also unendlich viele Ecken und unendlich viele Kanten der Länge 0.

Übung:
Berechne die Länge der Kurve in Stufe 1, 2 und 3. Überlege, wie sich die Kurvenlänge für höhere Stufen verhält.

Übung:
Berechne mit Formel (2) oben die fraktale Dimension D_H der Kochkurve. (Ergebnis: 1,262)

Lösung:
In der ersten Stufe gibt es 4 Teilstrecken der Länge $\frac{1}{3}$. Die Länge ist daher $L_1 = \frac{4}{3}$. In der 2. Stufe wird die Länge jeder Teilstrecke - also auch die Gesamtlänge - wieder mit $\frac{4}{3}$ multipliziert. Die Länge in Stufe 2 ist daher $L_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$. Das Verfahren wiederholt sich ständig. In der Stufe k ist die Länge daher $L_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k$, was wegen $\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots > 1$ immer größer wird. Die Kochkurve ist das Ergebnis unendlicher vieler Iterationen. Ihre Länge ist daher unendlich groß - ein wahres Monster!

Dabei ist der eingeschlossene Flächeninhalt der Kurve immer endlich. Das ist klar, da die Kurve stets in dem gleichen Rechteck enthalten ist. Der Flächeninhalt kann aber auch einfach berechnet werden. In der Stufe 1 muss man nur den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}$ berechnen.

Übung:

Zeige, dass der Flächeninhalt unter der Kurve der Stufe 1 gleich $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{36}$ ist.

Übung:

Zeige, dass der Flächeninhalt unter der Kochkurve gleich $A_\infty = \frac{\sqrt{3}}{20}$ ist.

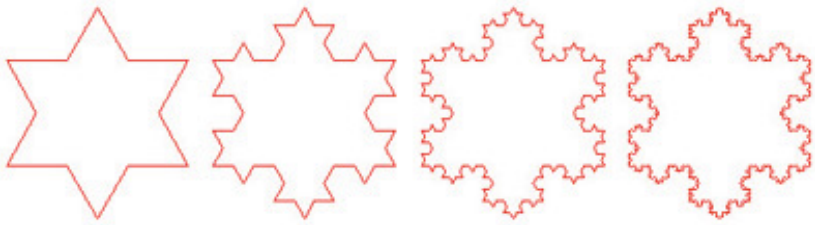
Lösung:
Der Flächeninhalt unter der Kochkurve sei gleich x. In der Kochkurve sind 4 Kopien der Kurve enthalten, die jeweils um den Faktor $\frac{1}{3}$ verkleinert sind. Der Flächeninhalt unter so einer verkleinerten Kurve beträgt daher nur noch $\frac{1}{9}x$. Wegen der 4 Kopien und wegen des enthaltenen gleichseitigen Dreiecks gilt die Gleichung

$$\frac{4}{9}x + \frac{\sqrt{3}}{36} = x, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Durch die Konstruktion steigt der Flächeninhalt von Stufe 1 bis zur Kochkurve also um 80%.

Zusammenfassung:
Die Kochkurve ist eine Kurve mit unendlich vielen Ecken und unendliche vielen Kanten der Länge 0. Die Länge der Kurve ist unendlich groß. Der Flächeninhalt unter der Kurve ist endlich. Die fraktale Dimension der Kochkurve ist gleich 1,26185...

Eine Variation der Kochkurve ist die Koch'sche Schneeflocke (auch Koch-Insel genannt). Statt mit einer Strecke der Länge 1 beginnt man allerdings mit einem gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge 1. Alle Seiten des Dreiecks werden dann nach dem oben beschriebenen Verfahren verändert. Im Grenzwert unendlich vieler Schritte entsteht dann die Koch'sche Schneeflocke.



Der Umfang dieser Kurve ist unendlich groß, während der eingeschlossene Flächeninhalt offensichtlich endlich ist.

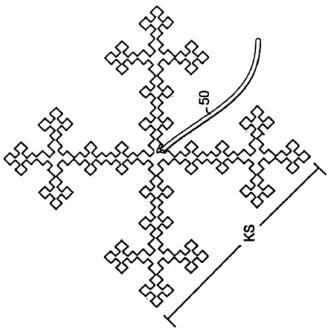
Übung:

Zeige, dass der in der Kochschen Schneeflocke eingeschlossene Flächeninhalt gleich $\frac{2}{5}\sqrt{3}$ ist.

Benutze dabei die Ergebnisse für die Kochkurve.

Mobilfunkantennen

Die Kochkurve besitzt eine überraschende Anwendung im Mobilfunk. Ein modernes Handy soll verschiedene Funktechnologien anbieten und verschiedene Netzstandards erfüllen. Jede Funktechnologie benutzt andere Wellenlängen (bzw. Frequenzen), für die eigentlich jeweils eine Antenne benötigt wird.



Um Raum zu sparen, hat man Antennen konstruiert, die Wellen mit ganz verschiedenen Wellenlängen einfangen können. In solchen Antennen wiederholt sich die gleiche Struktur auf immer kleinerer Ebene, s. Abbildung. Daher werden sie Fraktalantennen genannt. Meist folgt ihre Form einer Kochkurve oder einer Variation davon. Falls Dich dieses Thema interessiert, kannst Du im Internet z.B. unter http://de.wikipedia.org/wiki/Fraktalantenne und http://www.ki-portal.de/ai/resources/7685b942b00.pdf mehr erfahren.

4.3 Lindenmayer-Systeme
4.3.1 Einführung



Aristid Lindenmayer (1925-1989) war ein ungarischer theoretischer Biologe. 1968 erfand er eine formale Sprache zur Beschreibung biologischer Systeme. Diese Sprache basiert auf einfachen Ersetzungsregeln. Sie wird heute zum Beispiel in Computerspielen bei der Berechnung realistischer Landschaften eingesetzt.
Eine tiefe Einführung in diese L-Systeme steht in dem Buch http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.pdf.

Wir vereinbaren die folgenden Bezeichnungen.

F	Zeichne eine Linie der Länge 1.
+	Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn (ohne den Stift abzusetzen). Hierbei wird nicht gezeichnet, sondern nur die Richtung geändert.
-	Drehung um den Winkel α im Uhrzeigersinn (ohne den Stift abzusetzen). Hierbei wird nicht gezeichnet, sondern nur die Richtung geändert.

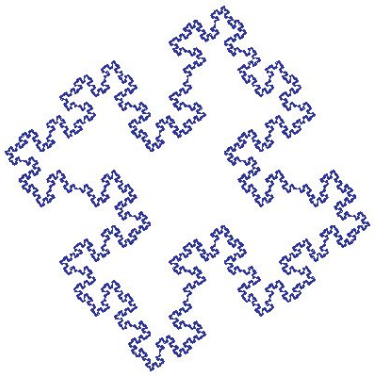
Zunächst setzen wir $\alpha = 90°$.

Zeichenketten wie F+F-F entsprechen einer Anweisung zum Zeichnen eines Diagrammes. Sie werden im Folgenden auch als Regeln bezeichnet. Aus diesen Zeichenketten entstehen schrittweise neue Zeichenketten, indem man immer wieder die gleiche Ersetzungsvorschrift anwendet, zum Beispiel F→F-F+ (Bedeutung: jedes F wird ersetzt durch F-F+). Hier ein sinnvolleres

Beispiel:
- Wende auf kariertem Papier die Zeichenregel F-F-F-F an (ein Kästchen=eine Einheit).
- Ersetze nun jedes F durch F-F+F+FF-F-F+F. Dadurch entsteht eine neue Zeichenregel. Wende diese ebenfalls an und zeichne.
- Wenn Du Geduld hast, ersetze noch einmal jedes F durch die Zeichenkette aus dem 2. Schritt. Zeichne wieder das Objekt, das durch die neue Regel ausgedrückt wird (es sind 256 Kanten).

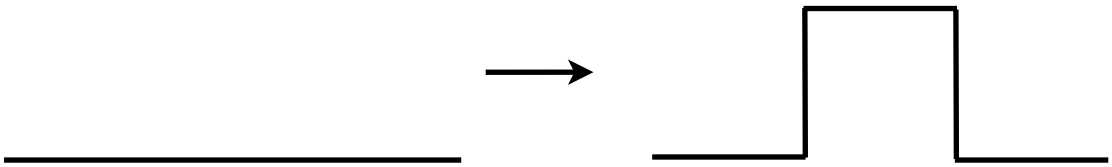
Wenn man dieses Verfahren immer wieder anwendet, werden die Kurven immer größer und größer. Daher verkleinert man mit jedem Iterationsschritt die Längen der Linien, die zu dem Symbol F gehören. Der Verkleinerungsfaktor s wird so gewählt, dass die Entfernung der Endpunkte der Ersetzung genauso groß ist, wie die Kante war.

Wendet man das Ersetzungsverfahren dann immer wieder an, so entsteht ein Fraktal. In dem Beispiel ist der Verkleinerungsfaktor $s = \frac{1}{4}$. Eine neue Kante besteht aus $n = 8$ verkürzten Kopien der alten Kante. Die fraktale Dimension des generierten Fraktals ist also $D_H = \frac{\ln 8}{\ln 4} = \log_4 8 = 1{,}5.$



Natürlich ist es sehr mühsam, die Ersetzungsregeln per Hand zu berechnen und dann per Hand auf Papier zu zeichnen. Im Internet gibt es verschiedene Java-Applets, die das automatisch machen. Mit dem Applet http://www.javaview.de/vgp/tutor/lsystem/PaLSystem.html kann man die obige Regel zeichnen und die Ersetzung anwenden. Als Axiom wird der Startpunkt bezeichnet, also in unserem Fall das Quadrat, das durch F-F-F-F entsteht. Gib die obige Ersetzung ein, setze die Anzahl der Iterationen gleich 1 und drücke dann Enter. Vergleiche das Ergebnis mit dem Ergebnis, das Du per Hand erzielt hast. Nun kannst Du die Anzahl der Iterationen (moderat!) erhöhen und schauen, wie sich die Kurve ändert.

Übung:
Ein Fraktal soll berechnet werden, bei dem jede Strecke iterativ wie folgt ersetzt wird.



Gib die zugehörige Ersetzungsregel an. Programmiere mit der o.a. Java-Anwendung diese Regel und wende sie zum Beispiel 4 mal - ausgehend von einem Quadrat - an.

4.3.2 Die Kochkurve als Lindenmayer-System

Zur Berechnung der Koch'schen Schneeflocke wählt man den Drehwinkel $\alpha = 60°$. Der Startpunkt („Axiom") ist ein gleichseitiges Dreieck F--F--F. Die Ersetzung ist durch F→F+F--F+F definiert.

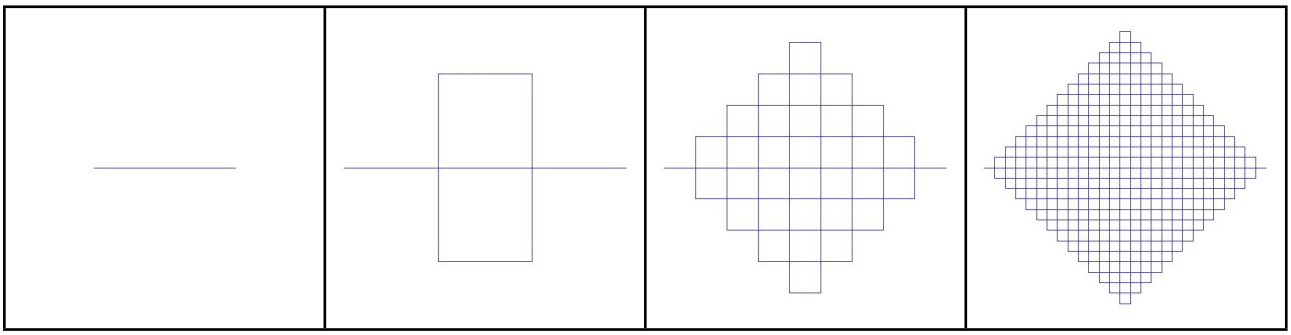
Übung:
Gib diese Regeln in das o.a. Java-Applet ein und berechne damit einige Iterationen der Koch'schen Schneeflockenkurve.

Gibt man das Startdreieck in der anderen Orientierung an, also als F++F++F, so entsteht eine andere Kurve, bei der die gewöhnliche Kochkurve nach innen in das Dreieck gezeichnet ist.

Übung:
Gehe kreativ mit dem Java-Applet um. Erfinde eigene Ersetzungsregeln und Startkurven. Auf der Internetseite http://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal findest Du einige Anregungen.

4.3.3 Peano-Kurve

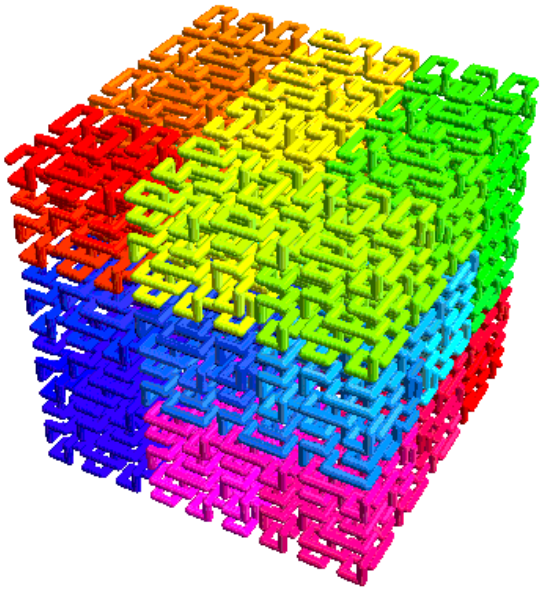
Die Berechnung der Peano-Kurve beginnt mit dem Axiom F. In einem Iterationsschritt wird F durch F-F+F+F+F-F-F-F+F ersetzt.



Der Ersetzungstext besteht aus 9 Kopien des Originals. Der Verkleinerungsfaktor je Iterationsschritt ist $s = \frac{1}{3}$.

Übung:
Berechne die fraktale Dimension der Peano-Kurve.

Peano-Kurve, die in einem Zug ohne Streckendopplungen durchlaufen wird, hat damit die gleiche Dimension wie eine Fläche! Sie wird als raumfüllende Kurve bezeichnet. Die Peano-Kurve ist sogar der Urahn der raumfüllenden Kurven. Sie wurde von Giuseppe Peano rein formal ohne geometrische Anschauung entwickelt.
Es existieren auch dreidimensionale raumfüllende Kurve, wie die folgende Abbildung zeigt.

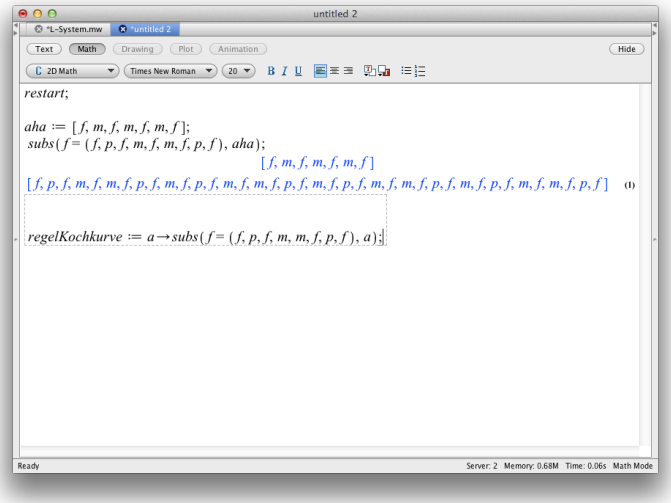


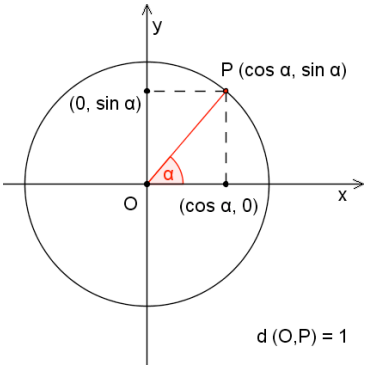
Im Folgenden werden nun 2 Vertiefungsmöglichkeiten angeboten. Einerseits kannst Du Lindenmayer-Systeme in Maple programmieren. Damit wird auch die Anwendung von komplizierteren Ersetzungsregeln möglich. Andererseits kannst Du Fraktale mit Papier durch Falten nach den Lindenmayer-Regeln per Hand herstellen. Zum Schluss kannst Du dann noch fraktale Spiralen in dem berühmten Apfelmännchen suchen und finden.

4.4 Vertiefung: Maple-Programm zum Zeichnen von fraktalen Kurven

Durch die Anwendung eines vorgefertigten Applets kann man viele verschiedene fraktale Kurven studieren. Es lohnt sich jedoch auch, einmal hinter die Kulissen zu schauen und zu versuchen, solche fraktale Kurven selber zu programmieren. Dies wird hier verfolgt. Mit dem fertigen Programm können dann auch solche fraktale Kurven berechnet werden, die das Applet oben nicht erzeugen kann.

In dem Programm wird das Erzeugen der Zeichenkette und das Zeichnen des Fraktals voneinander getrennt. Eine Startzeichkette wird als Liste in Klammern *[ ]* eingegeben. Statt + und - verwenden wir dabei lieber die Buchstaben p und m.
Die Ersetzungsvorschrift von Zeichen wird in Maple mit dem Befehl *subs* programmiert.
Im Folgenden werden die Regeln als Funktionen definiert und benannt, wie in der unteren Zeile rechts.

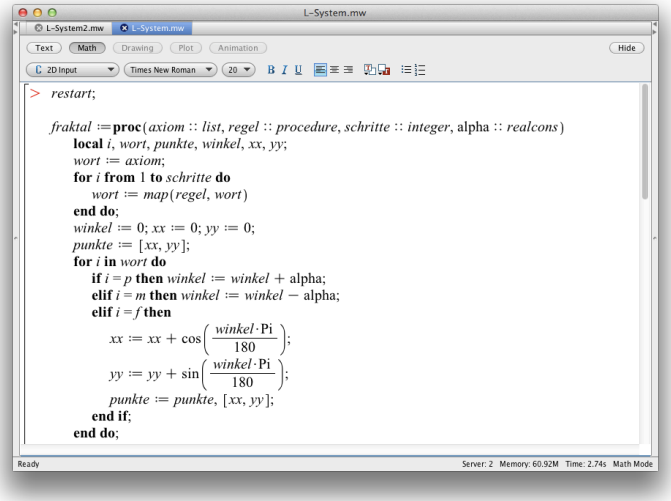


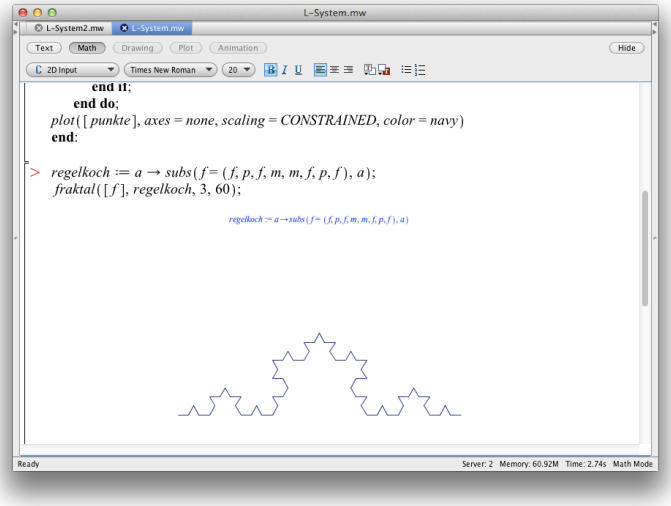


Durch wiederholte Anwendung der Ersetzungsvorschrift entstehen rasch sehr lange Zeichenketten, die man nach einer Anzahl von Schritten in Punktkoordinaten umrechnen muss. Das Bild links zeigt, dass man dabei zu der x-Koordinate des aktuellen Punktes $\cos\alpha$ addieren muss. Zu der y-Koordinate wird $\sin\alpha$ hinzugefügt. Dies ergibt dann die Koordinaten des nächsten Punktes. Dabei ist α der absolute Drehwinkel, bezogen auf die Richtung der x-Achse.

Der Rest ist einfach. Um strukturiert vorzugehen, definiert man in Maple eine Funktion *fraktal*. Die Argumente dieser Funktion sind das Axiom, also die Startzeichenkette, die Ersetzungsregel, die Anzahl der Schritte sowie der zugehörige Drehwinkel α in Grad.

Zunächst wird die Ersetzungsregel mit dem Befehl *map* immer wieder auf die Zeichenkette *wort* angewendet. Bei der Auswertung der Zeichenkette fragt man jeweils, um welches Zeichen es sich handelt. Je nachdem wird der Winkel verändert bzw. ein neuer Punkt berechnet.

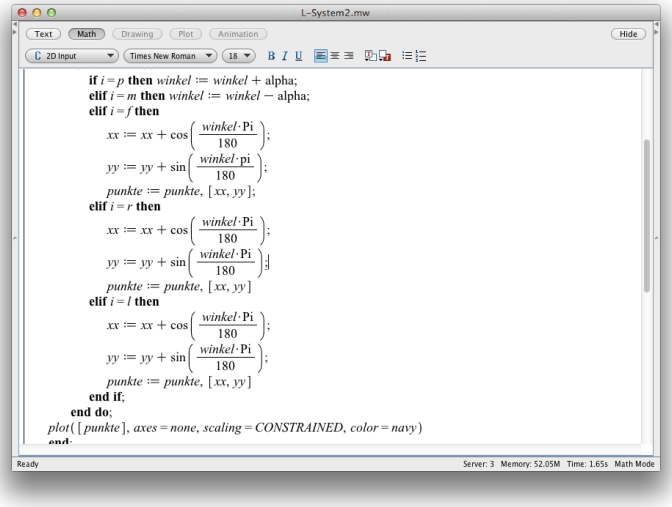


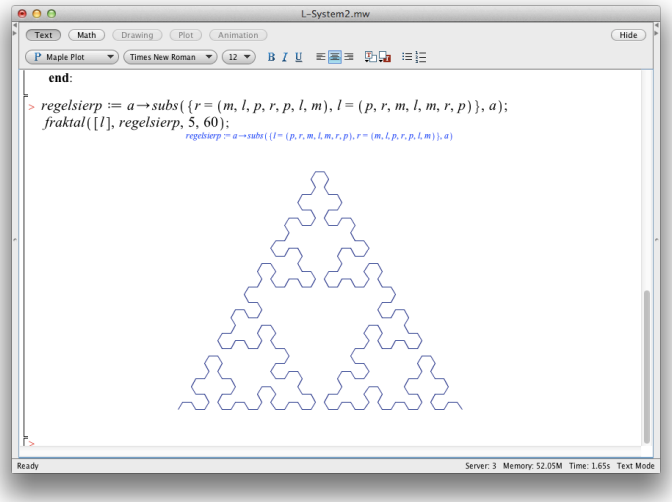
Mit dem *plot*-Befehl werden die Punkte ausgegeben. Rechts ist die Anwendung der Funktion *fraktal* für die Kochkurve dargestellt. Mit dem Programm kann jetzt wie mit dem Java-Applet oben gearbeitet werden.	

Für manche fraktale Kurven werden 2 Ersetzungsregeln benötigt, vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal. Dazu wird der Zeichensatz um 2 Symbole erweitert.

R	Zeichne eine Linie der Länge 1.
L	Zeichne eine Linie der Länge 1.

Die Symbole R und L bewirken also dasselbe wie das Symbol F. R und L werden aber bei dem Ersetzungsverfahren anders behandelt, da es für jedes Symbol eine eigene Regel gibt. Interessant ist zum Beispiel das Regelwerk R→-L+R+L- und L→+R-L-R+.

In dem Maple-Programm werden die beiden zusätzlich Symbole wie das Symbol F behandelt. Die entsprechenden Zeilen kann man einfach kopieren.	

Mit dem Befehl *subs()* können auch mehrere Ersetzungen parallel verarbeitet werden. Dazu schreibt man die Regeln in {} Klammern.	

Übung:

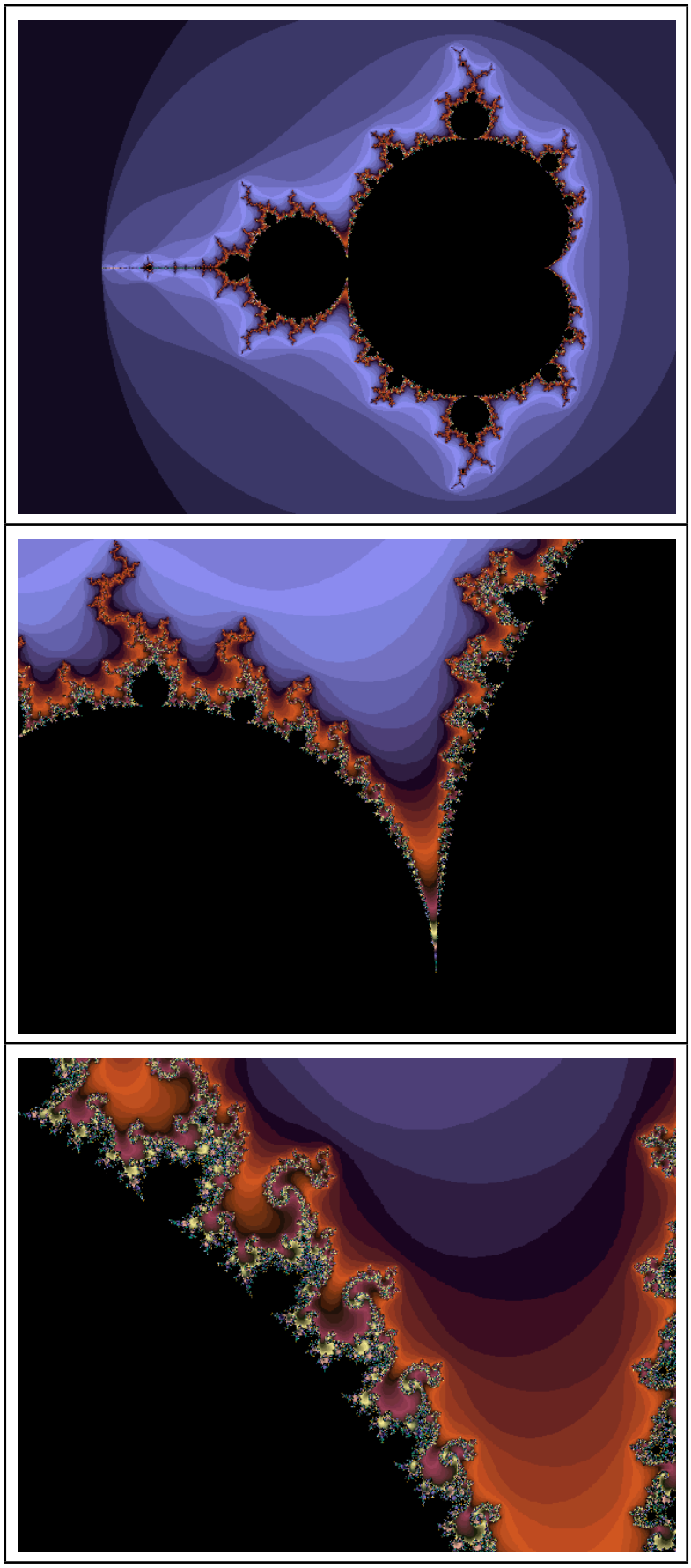
- Schreibe das Programm in Maple und verändere die Anzahl der Iterationsschritte!
- Erzeuge mit dem Programm weitere Fraktale, die auf 2 Regel basieren, zum Beispiel die Drachenkurve oder die Hilbert-Kurve. Die Regeln findest Du in der Wikipedia/Fraktal.
- Erfinde weitere Regeln zur Erzeugung von Fraktalen und probiere Sie mit dem Maple-Programm aus.

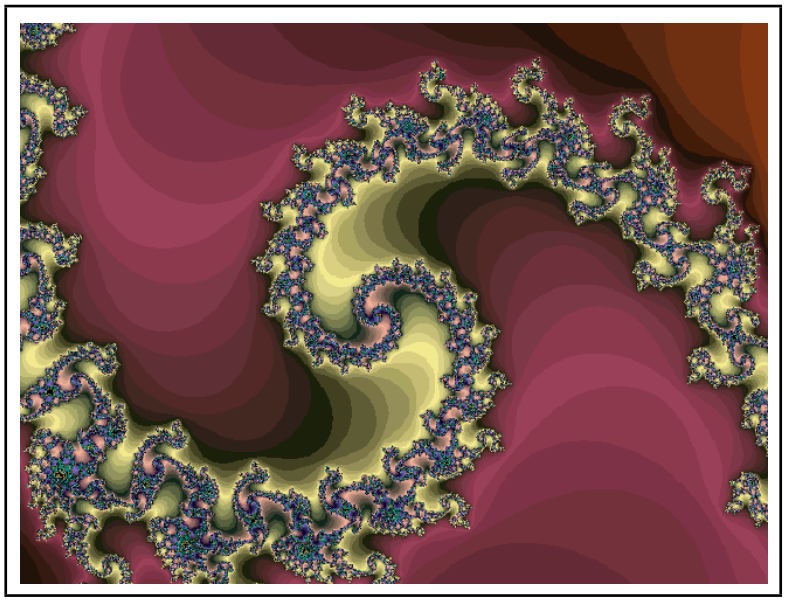
4.5 Vertiefung: Fraktale durch Falten von Papier

Fraktale durch Falten von Papier? Das geht! Studiere den Artikel http://www.mevis-research.de/~albers/Publikationen/Dissertation/K10_FraktaleKurven.pdf und falte los!

4.6 Fraktale - unendliche Weiten

Die folgenden vier Abbildungen wurden mit dem Programm Xaos erzeugt und zeigen immer kleinere Ausschnitte der sogenannten Mandelbrot-Menge, die - verkürzt gesagt - angibt, für welche Werte der Zahl c die fortgesetzte Iteration $z_{n+1} = z_n^2 + c$ endlich bleibt. Dabei nehmen die Variablen komplexe Werte ein, was über den Inhalt dieses Moduls und dieser Mathenacht hinausführt. Trotzdem lohnt die Beschäftigung mit dem Apfelmännchen und dem Programm Xaos. Man findet beim Zoomen in den Rand der Mandelbrot-Menge hinein vertraute Objekte wie die Spirale (siehe Modul 1), nun aber mit einem fraktalen Rand, der merkwürdig und schön zugleich ist.





Übung:
Experimentiere mit dem Programm Xaos oder auch im Internet unter http://gis.ibbeck.de/apps/Mandelbrot/htdocs/wms_mandelbrot_frames.html mit einem Fraktalgenerator und suche wiederkehrende Einheiten, Spiralen und andere interessante Kurven.

Literatur & Quellen

Der Abschnitt zur Dimension (inklusive der Abbildungen) ist angelehnt an bzw. übernommen aus dem Artikel Mathematische Monster-Algorithmen der Fraktalen Geometrie von Wolf Bayer.

Die Quellen aus dem Internet sind mit Links gekennzeichnet.

Noch mehr über Fraktale erfährst Du in den Klassikern

Benoît B. Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur*, Birkhäuser,
Heinz-Otto Peitgen, Peter H. Richter: The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems, Springer.